استاد کبرایی

دروس این ترم

۱- عبارت جبری
۲- معادله و نامعادله
۳- رابطه   تابع
۴- حد و پیوستگی
۵- مشتق
۶- کاربرد مشتق

فرق اعداد و ارقام در چیست؟ ارقام از ۱ تا ۹ هستند
اعداد از ۱ تا بی‌نهایت

الویت به ترتیب

۱- ( )
۲- توان
۳- ضرب
۴- تقسیم
۵- جمع
۶- تفریق

مثال

$$\underset{4}{2^2} \times 3 + \underset{②}{\boxed{6 \div 3}} =$$

تقسیم ضرب توان

$$12 + 2 = 14$$

$$2^2 \times 3 = 12$$

$$+ \quad = 14$$

$$6 \div 3 = 2$$

مثال

$$\overset{2}{\boxed{2^3}} \underset{3}{\times} \overset{1}{(\boxed{3+6})} \underset{4}{\boxed{\div 3}} =$$

$$3+6=9$$

$$2^3 = 4$$

$$9 \times 4 = 36 \div 3 = 12$$

مجموعه اعداد مثبت بزرگتر از صفر

اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵، \ldots ∞\}$

در اعداد طبیعی مثلاً بین ۳ و ۴ هیچ عدد دیگری وجود ندارد.

اعداد صحیح $\mathbb{Z} = \{-∞ \ldots، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳ \ldots +∞\}$

شامل اعداد منفی، مثبت و صفر

اعداد گویا $\mathbb{Q}$

عضو $\in$

→ اعشاری

اعداد گنگ $\mathbb{Q}'$

زیرمجموعه $\subset$ $\subseteq$

اعداد حقیقی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

→ شامل همه اعداد مثل اعشاری و غیر اعشاری

مثلاً $K \{۱، ۲، ۳\}$

$۱ \in K$

$۲ \in K$

$۳ \in K$

وقتی میخوایم همین کنیم که ۱ عضو K هست اینجوری مینویسیم.
$\in$

ولی وقتی میخوایم بنویسیم که ۱ زیرمجموعه K هست اینجوری

$\{۱\} \subseteq K$

زیرمجموعه حتماً باید عدد داخل کروشه باشه.

مثلاً مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ را بنویسید

کدام مجموعه $\{\quad\}$

$A = \{۱، ۲، ۳، ۴\}$

A و B و C ـــ

مجموعه‌ها با حروف بزرگ انگلیسی نشان داده میشوند

∈ عضو با این علامت نشان داده میشود مثلا $a \in A$

مثال: مجموعه اعداد فرد یک تا پنج را بنویسید. $B = \{۱, ۳, ۵\}$

مجموعه اعداد صحیح

$C = \{-\infty, \ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, +\infty\}$

مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد مجموعه تهی گفته میشود ∅ که نمایش به این صورت

یا $\{\ \}$

مثلا مجموعه اعداد طبیعی کمتر از صفر ← $D = \{\ \}$

چون اعداد طبیعی کمتر از صفر نداریم.

مجموعه اعداد گویا $D = \{Q\}$

زیر مجموعه خودش یک مجموعه است.

✓ $A = \{1\} \subseteq K$

غلط $1 \subseteq K$

هر مجموعه ای زیر مجموعه خودش است

$B = \{1, ۲\}$ $B \subseteq K$

$C = \{1, ۳\}$ $C \subseteq K$

$K = \{1, ۲, ۳\}$ $K \subseteq K$

۲ تهی $J = \{\ \}$ $J \subseteq K$

Subject: ۳ Date:

تعداد زیرمجموعه‌ها

تعداد زیرمجموعه = ۲^n

تعداد اعضا = n

$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

$۲^۳ = ۸$

۱ {۱} {۲} {۳}

۲ {۱,۲} {۱,۳} {۲,۳}

{∅} {۱,۲,۳}

مجموعه توانی: مجموعه تمام زیرمجموعه‌ها است.

$P(A)$ { }

مجموعه توانی

تمرین

$-\infty$ $+\infty$ $x \in \mathbb{R}$

(۲,۶) $x \in \mathbb{N}$ {۳,۴,۵} پرانتز یعنی اون عدد رو شامل نمیشه

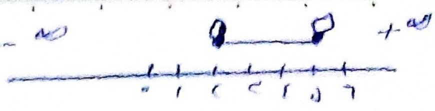
[۲,۶) {۲,۳,۴,۵} کروشه یعنی اون عدد رو هم شامل میشه

(۲,۶] {۳,۴,۵,۶}

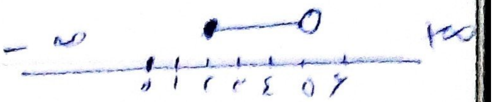
[۲,۶] {۲,۳,۴,۵,۶}

کمترین زیرمجموعه هر مجموعه ϕ است. هر مجموعه زیرمجموعه خودش است

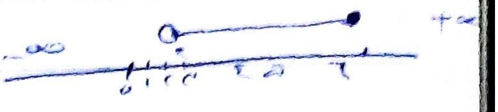
(۲, ۶) $x \in \mathbb{N}$ {۳, ۴, ۵} $x \in \mathbb{R}$



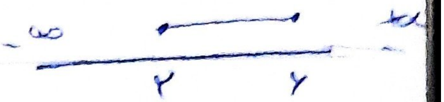
[۲, ۶) $x \in \mathbb{N}$ {۲, ۳, ۴, ۵} $x \in \mathbb{R}$



(۲, ۶] $x \in N$ {۳, ۴, ۵, ۶} $x \in R$



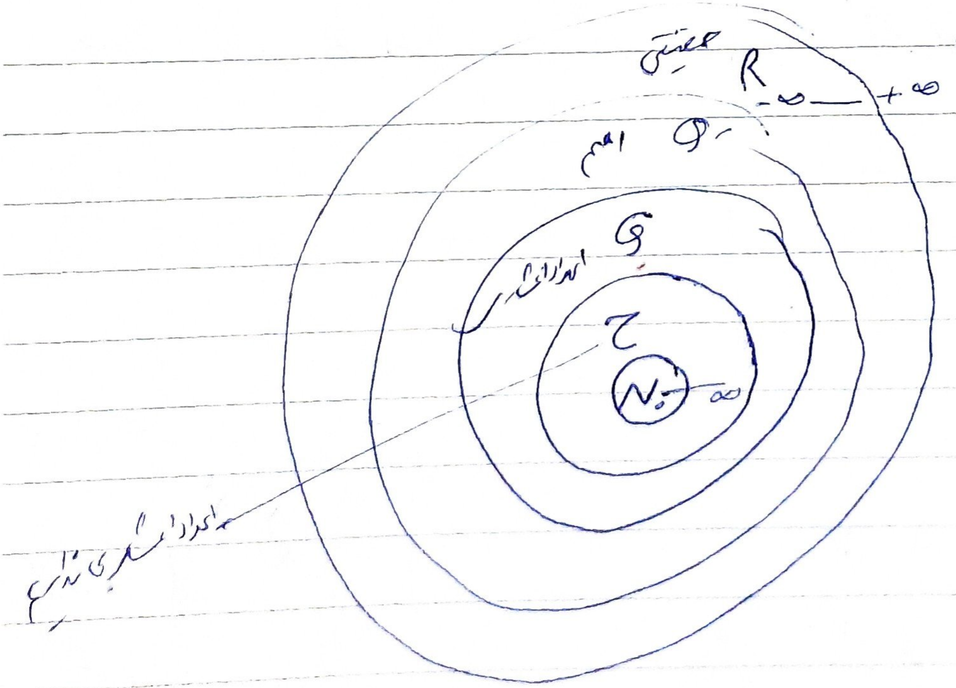
[۲, ۶] $x \in N$ {۲, ۳, ۴, ۵, ۶} $x \in R$



Z از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت

$N \subseteq Z \subseteq Q \} \in R$ Z دو برابر N

$(-\infty , +\infty)$ R


حقیقی
R
-∞ +∞
Q'
اصم
Q
اعداد گویا
Z
N
∞
اعداد صحیح منفی

Subject: Date: جلسه دوم Sa Su Mo Tu We Th Fr

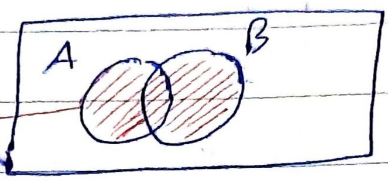
و $\cap$ علامت اشتراک

یا $\cup$ علامت اجتماع

عبارت ریاضی :

هر عضوی که

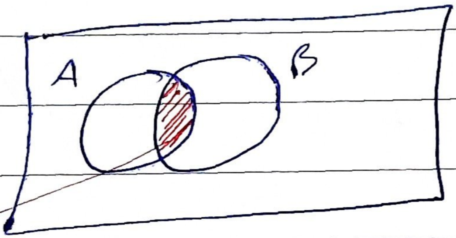
$A \cup B \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$



$\cup$ اجتماع

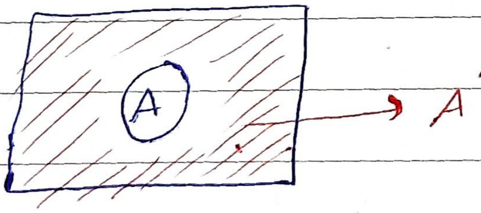
$A \cap B \{x \mid x \in A$ و $x \in B\}$

یا اجتماع
فرق :
و اشتراک

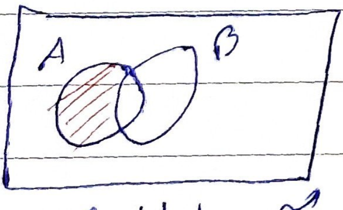


اشتراک
$\cap$

متمم $A' : \{x \mid x \notin A\}$ هر عضوی که عضو A نباشد میشه A'

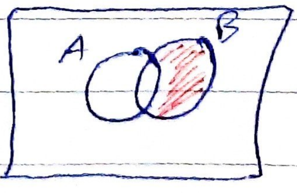


، ، ، ،



$A - B$

یعنی هر چیزی که در B هست را از A برداریم



$B - A$

یعنی A رو باید کم کنیم.

PAPCO

$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$ →

(تمرین:)

A {-۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۲}

B = {۲, ۴, ۷, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۳}

C {۱, ۵, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۴}

یعنی جمع ولی تکراری نباشه

(A ∪ B) ∩ C   A ∪ B = {-۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۳}

(A ∪ B) ∩ C = {۵, ۹, ۱۲}

C ∩ A = {۵, ۹, ۱۲}

B ∪ C ∪ A.   B ∪ C {۲, ۴, ۷, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱, ۵, ۱۰, ۱۴}

→ {-۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۲, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۰, ۱۴}

(B ∩ C) ∪ A = → B ∩ C {۹, ۱۲}

{۹, ۱۲} ∪ A → {-۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۲}

A ∪ B → = {-۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۳}

$(A\cap B)\cap C$
$=$
$\{۹ , ۱۲\}$

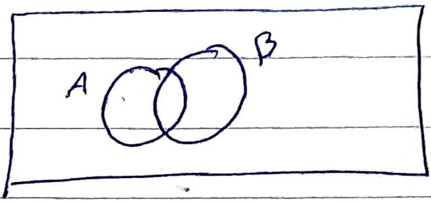
$A\cap B = \{۲ , ۹ , ۱۲\}$
$C\ \{۱ , ۵ , ۹ , ۱۰ , ۱۲ , ۱۴\}$

۴ ۲ ۲۳

قوانین دمورگان :

دمورگان اشتراک را به اجتماع و اجتماع و به اشتراک تبدیل می‌کند و پریم می‌کند

M مرجع

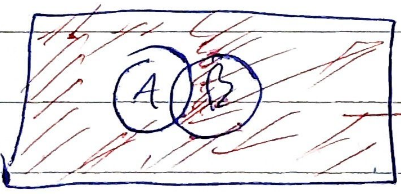


A′ یعنی همه‌چی جز A

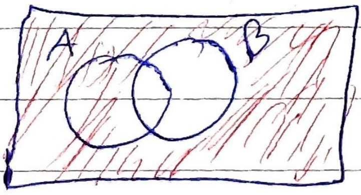
B′ پریم یعنی همه‌چی جز B

$(A\cup B)' = A'\cap B'$
اجتماع
اشتراک

$(A\cap B)' = A'\cup B'$
اشتراک
اجتماع



A′
همه‌ی غیر A



B′ همه‌ی غیر B

M یا U مرجع

∅ تهی

$(A')' = A$
متمم هر چیزی میشه خودش.

$\emptyset' = M$

$M' = \emptyset$

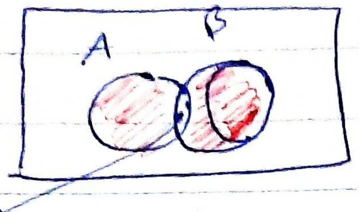
اگر $A \subset B$ ← اونوقت $B' \subset A'$

مثلاً $A \subset B$ آنگاه بخواهیم ثابت کنیم مثلاً $B' \subset A'$

۲ ۲ ۲

تفاضل متقارن Δ دلتا

با این علامت نشان داده میشود.



$A \Delta B$
=
$(A-B) \cup (B-A)$

به جز این دوتا
قسمت اشتراک

$(A-B) \cup (B-A)$

تمرین

تمرین.

$A \{۲, ۳, ۴, ۵\}$

$B \{۱, ۲, ۶, ۷, ۸\}$

$A - B = \{۳, ۴, ۵\}$ — یعنی چیزی که توی A هست ولی B نداشته باشه.
یعنی ۲ که حذف میشه

$B - A = \{۱, ۶, ۷, ۸\}$ همه چیزی که توی B هست ولی A نداشته باشه
۲ حذف شده از B

$A \Delta B = \{۳, ۴, ۵, ۱, ۶, ۷, ۸\}$
$(A-B) \cup (B-A)$

۲ ۲ ۳ ۹

ضرب دکارتی مجموعه ها

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه شامل یک زوج مرتب است که دارای دو مولفه میباشد
(a , b)

که عضو اول (A) مربوط به مجموعه اول و عضو دوم آن (B) مربوط به مجموعه دوم است.

PAPCO

حاصل ضرب دکارتی $A \times B$

n تعداد اعضای مجموعه

A {۱, ۲, ۳} ——— الان اینجا ۳ تا تعداد اعضا داریم

B = {a, b} ——— اینجا ۲ تا تعداد اعضا داریم

تعداد اعضای A را با B [illegible]

A × B = {(۱, a), (۱, b), (۲, a), (۲, b), (۳, a), (۳, b)}

(مجموعه‌ای از زوج مرتب

B × A = {(a, ۱) (a, ۲) (a, ۳) (b, ۱) (b, ۲) (b, ۳)

[illegible]

فرمول تعداد اعضا n (A × B) = n(A) n(B)

۶ = (۳) (۲)

۲ × ۳ <

تمرین ۱_۲_۱۱

A = {a, b}

B {۱, ۲}

C {۲, ۳}

A × (B ∩ C)

A {a, b}

B ∩ C {۲}

= {(a, ۲), ~~x~~(b, ۲)}

(A × B) ∪ (A × C)

A × B = {(a, ۱) (a, ۲) (b, ۱) (b, ۲)

A × C = {(a, ۲), (a, ۳) (b, ۲) (b, ۳)

(A × B) ∪ (A × C) {(a, ۱) (a, ۲) (b, ۱) (b, ۲)

(a, ۳), (b, ۳)

Subject: Date:

$A \times (B \cup C)$

$A = \{a, b\}$

$B \cup C \{۱, ۲, ۳\}$

$A \times (B \cup C) = \{(a,۱),(a,۲),(a,۳),(b,۱),(b,۲),(b,۳)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C)$

$A \times B = \{(a,۱),(a,۲),(b,۱),(b,۲)\}$

$A \times C = \{(a,۲),(a,۳),(b,۲),(b,۳)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C) \{(a,۲),(b,۲)\}$

۲ ۳ ۴

تمرین ۱-۲-۲۷

فرض کنید U مجموعه تمام افراد جامعه میباشد.

T مجموعه تمام افرادی که با قطار سفر می کنند.

B مجموعه تمام افرادی که با اتوبوس سفر می کنند

P مجموعه تمام افرادی که شطرنج بازی می کنند

S مجموعه تمام افرادی که سیگار می کشند

R مجموعه تمام افرادی که روزنامه میخوانند

عبارت‌های زیر را به زبان مجموعه‌ها بنویسید

الف- تمام افرادی که با قطار سفر می کنند و شطرنج بازی می کنند. $(T \cap P)$

ب- تمام افرادی که با اتوبوس سفر می کنند و روزنامه میخوانند ولی سیگار نمی کشند. $(B \cap R \cap S')$

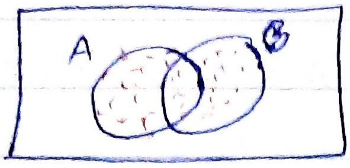
ج- تمام افرادی که شطرنج بازی می کنند ولی سیگار نمی کشند. $(P \cap S')$

د- تمام افرادی که با قطار سفر می کنند ولی همه با اتوبوس روزنامه میخوانند و سیگار می کشند.

$T \cap B \cap R \cap S$

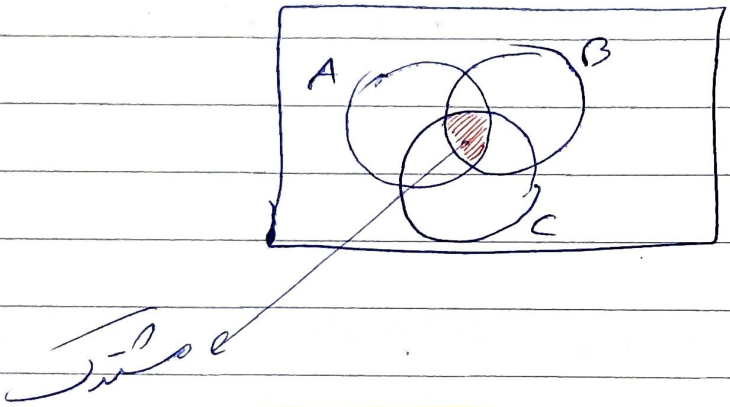
تعداد اعضای مجموعه $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

جمع می‌کنیم . جمع می‌کنیم مشترک کم می‌کنیم



فرمول $n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B)$

$- n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$



۱. فرض کنیم مجموعه‌ای دارای ۴۰ عضو است A شامل ۴۰ عضو است و B شامل ۳۵ عضو است. و ۱۰ تعداد اعضای مشترک هستند. مجموعه A ∪ B چند عضو است

$n(A\cup B) = n(A) + n(b) - n(A\cap B)$

$۴۰ + ۳۵ - ۱۰ = ۶۵$ نفر

۲- در یک تعمیرگاه اتومبیل ۴۰ نفر از کارکنان می‌توانند کارهای مکانیکی انجام دهند.
۲۵ نفر هم کارهای برقی انجام می‌دهند.
۵ نفر هم کارهای مکانیکی و هم برقی انجام می‌دهند، تعداد کل کارکنان این کارگاه را حساب کنید.

$n(A\cup B) = n(A) + n(b) - (n\cap B)$

$۴۰ + ۲۵ - ۵ = ۷۰$

نفر

جلسه سوم

نامعادله

$\geq$ $>$

$\leq$ $<$

$x \in \mathbb{R}$

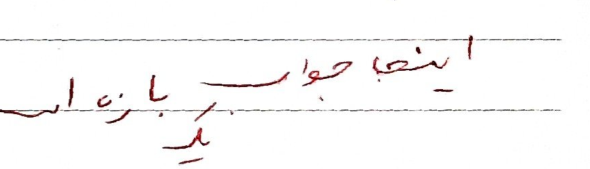
$۲x + ۴ \leq ۸$

$۲x \leq ۸ - ۴$

$۲x \leq ۴$

$x \leq \frac{۴}{۲}$

$x \leq ۲$



اینجا جواب یک بازه است.

معادله

$۲x + ۴ = ۸$

$۲x = ۸ - ۴$

$۲x = ۴$

$x = ۴ - ۲$

$x = ۲$

اینجا جواب یک عدد است

در معادله جواب یک عدد است

در نامعادله جواب یک بازه است.

$۲x = ۴$ معادله درجه ۱

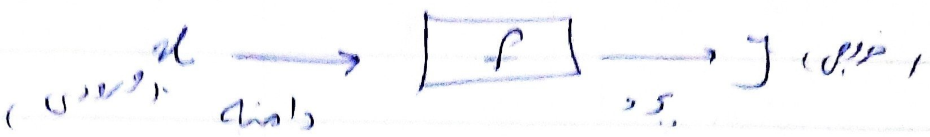
$۲x^{۲} = ۴$ معادله درجه ۲

$x^{۳} = ۸$ معادله درجه ۳

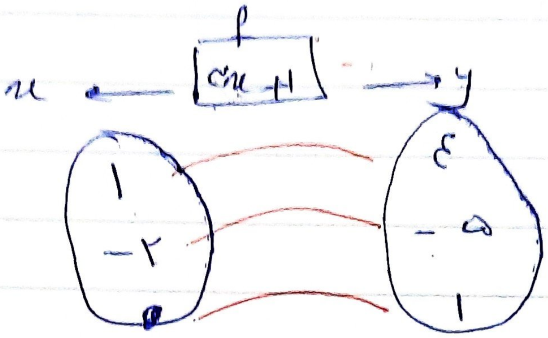
مبحث رابطه تابع و زوج مرتب، دستگاه مختصات و معادله خطی

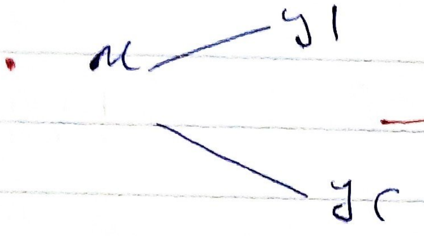
فانکشن

f یعنی تابع


x
(ورودی)
دامنه
f
برد
y
(خروجی)

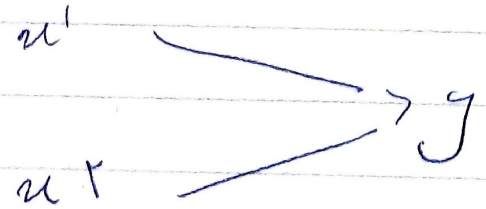
مثال $2x+1$


f
x
2x+1
y
1
-2
0
3
-3
1



این تابع نیست یک ورودی نمی‌تواند ۲ تا خروجی داشته باشد.

تابع $x \rightarrow y$ یک ورودی → یک خروجی

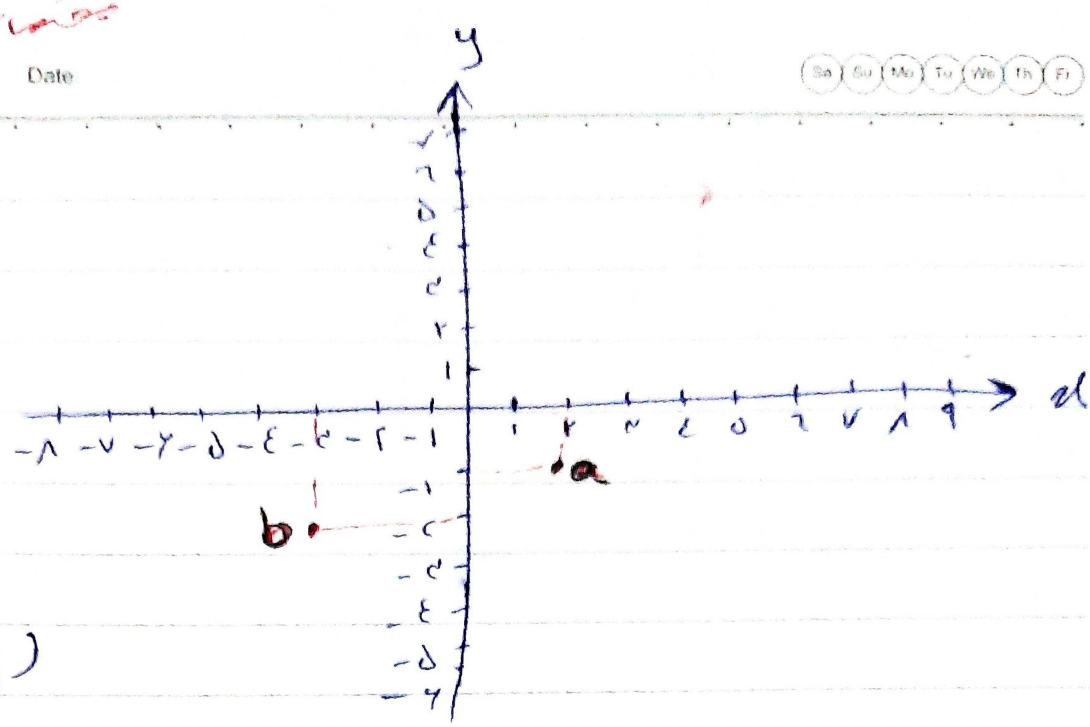


تابع

یک خروجی ← دو تا ورودی

Subject: مختصات دکارتی

Date



y
x
۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
-۱
-۲
-۳
-۴
-۵
-۶
-۷
-۸
a
b

(x,y) نقطه

$a = (۲,-۱)$

$b\,(-۳\,-۲)$

تابع یعنی x $f(x) = y$

فرقی ندارد

تابع $f(x) = ۲x + ۱$

تابع $y = (۲x + ۱)$

③ $y = ۲×۱+۱$

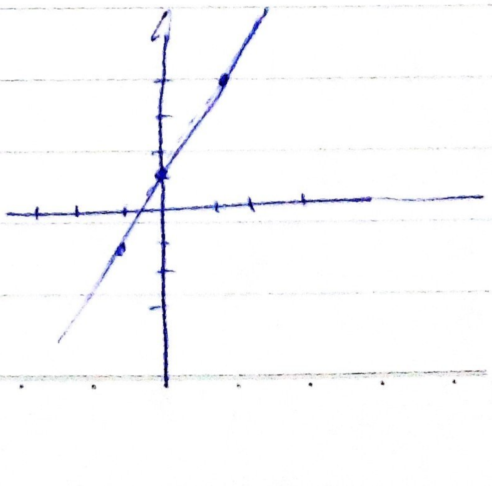
ورودی $x = ۱ \longrightarrow y = ۳$ خروجی

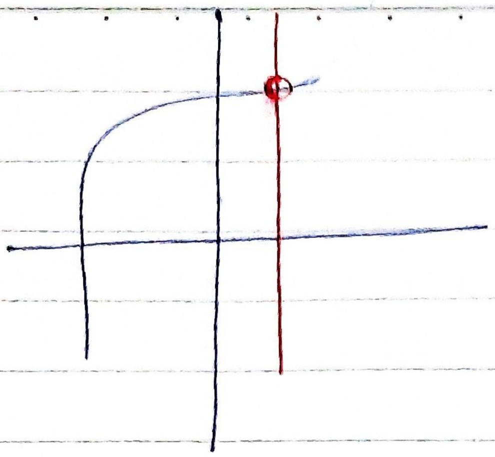
$y = (۲x+۱) = \overset{۲×۰+۱}{} = y = ۱$

$x = ۰ \longrightarrow y = ۱$

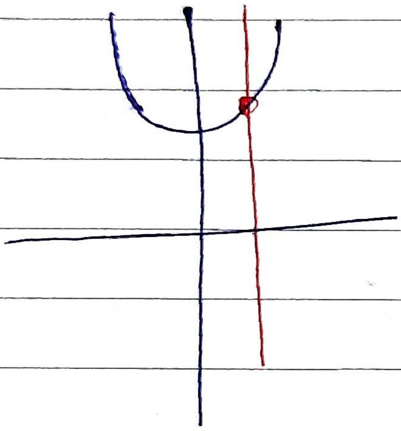
$y = ۲x + ۱$

x	y
۰	۱
۱	۳
-۱	-۱

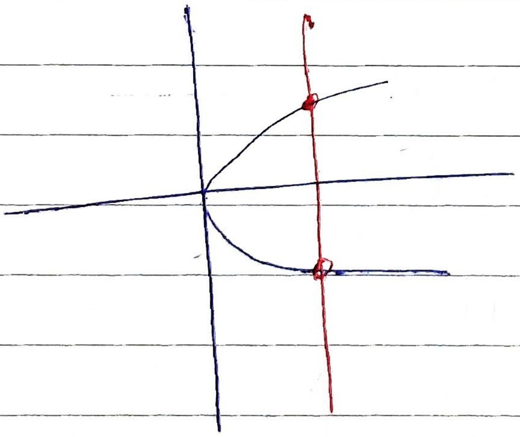




$y = x^{۳}$



$y = x^{۲}$



$x = y^{۲}$:

← تابع نیست

$y^{۲k}$ مهم

$y^{\text{مقدار زوج}}$

تابع نیست

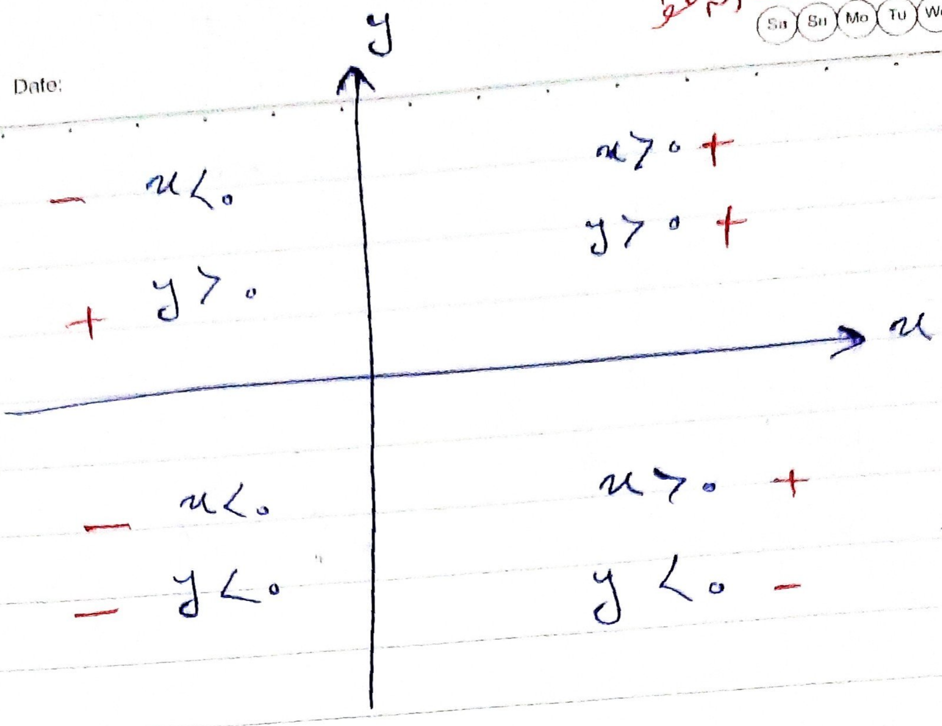
چون زوج است.

یک ورودی نمی‌تواند ۲ تا خروجی داشته باشد

معادله خط

Subject:

Date:


y
x
$x > 0$ +
$y > 0$ +
− $x < 0$
+ $y > 0$
− $x < 0$
− $y < 0$
$x > 0$ +
$y < 0$ −

برای نوشتن یک معادله خط یا نوشتن تابع خطی

یک نقطه و شیب

دو نقطه

یک معادله خط $y = \overset{(m)}{a}x + b$

شیب یا ضریب زاویه

عرض از مبدأ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

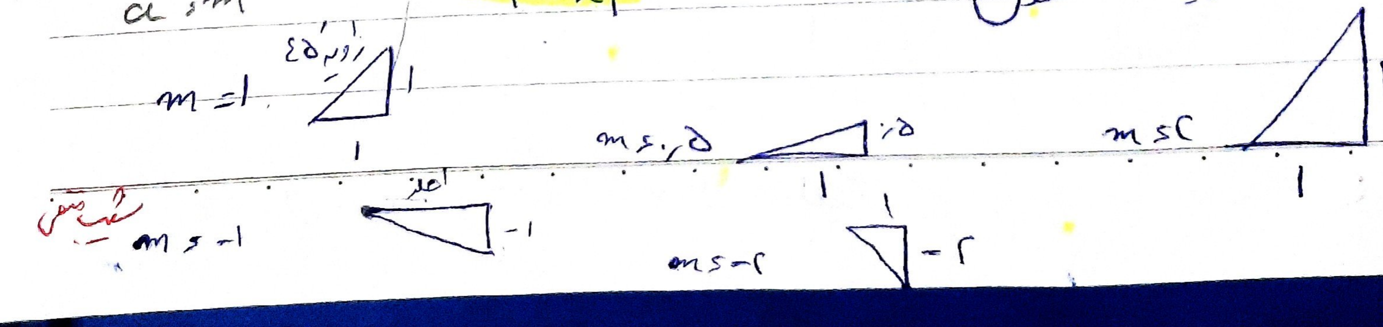
$$y = \underset{a}{\underset{=}{m}}x + b$$

مفهوم عامیانه شیب تغییرات عمودی نسبت به تغییرات افقی

فرمول بدست آوردن شیب

$$m = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

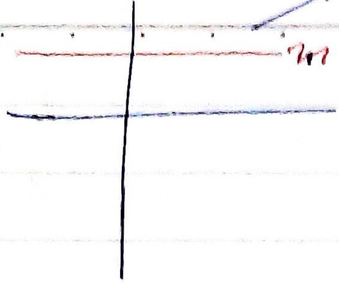
$a = m$


زاویه ۴۵
$m = 1$
1
1
$m = 0.5$
0.5
1
$m = 2$
2
1
شیب منفی
$m = -1$
اعز
-1
$m = -2$
1
-2

∝

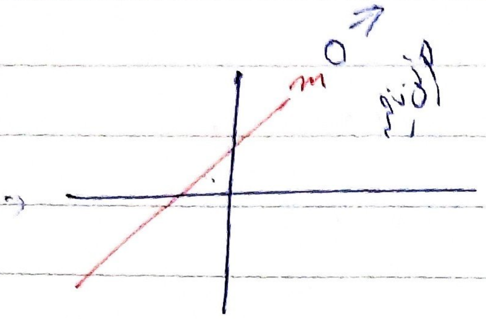
چون افقی شیب ندارد

$m = 0$



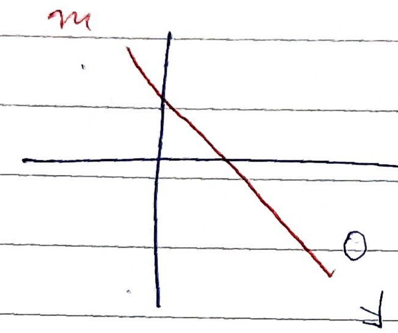
۱ ۲ ۳ ۴

x ٠ $y = m = 0$



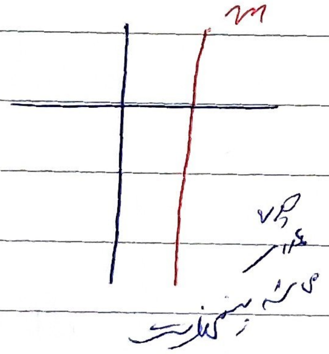
افزایش افزایش

$x \uparrow$ $y \uparrow$ → $m > 0$



$x \uparrow$ $y \downarrow$ $m < 0$

شیب منفی



$m = \infty$ شیب بی‌نهایت

خط ۹۰ درجه

نکته

شیب

$m_1 = m_2$ $m_a = m_b$ a و b موازی

$m_a \times m_b = -1$ b و a عمود هستند

$m_a = \frac{-1}{m_b}$

شیب‌ها مثل دوتا خط با هم عمود باشند

ضربشون −1

شیب‌ها مثل دوتا خط موازی باشند، شیب آنها مساوی هم باشند

عرض از مبدا نقطه جایی است که خط محور y ها را قطع می کند:

فرم کلی معادله خط $y = ax + b$ با نقطه و شیب ۱

دو نقطه ۱ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m}$$

مثال

$a = (5, 1)$ $b = (2, 1)$

$x_1 \; y_1$ $x_2 \; y_2$

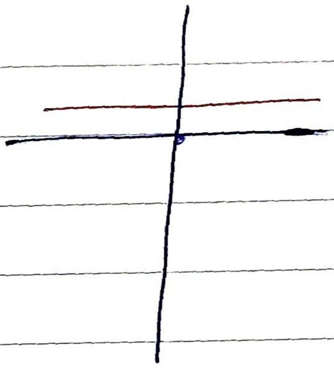
معادله خطی که از دو نقطه می گذرد را بنویسید؟

$$m = \frac{\overset{y_2 - y_1}{1 - 1}}{2 - 5} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\boxed{\text{فرمول} \quad y - y_1 = \overset{0}{\overbrace{m(x - x_1)}}}$$

$y - 1 = 0(x - 5)$

$y - 1 = 0 \quad y = 1$



تمرین

$a(1, 2)$ $b(-2, 1)$

$x_1 \; y_1$ $x_2 \; y_2$

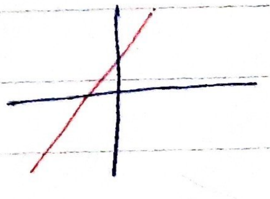
اول $m = \frac{1 - 2}{-2 - 1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ $\boxed{m = 1/3}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 1/3(x - 1)$

$y - 2 = 1/3 x - 1/3 \rightarrow y = 1/3 x - 1/3 + 2$

$= y = 1/3 x + 5/3$



Subject: Date: Sa Su Mo Tu We Th Fr

سه شنبه

مسئله ۱

معادله خطی را بنویسید که از نقطه A به مختصات $A(-2,4)$ می‌گذرد و بر خط $2x+y=4$ عمود است

$A=(-2,4)$

$2x+y=4$

$y=-2x+4$

$m=-2$

اول m این خط رو بدست میاریم.

چون که نقطه عمود است این فرمول $m_a \times m_b = -1$

از معکوس و قرینه استفاده کردیم (-2)

$m'=\frac{1}{2}$

$y-y_1=\boxed{m}(x-x_1)$

اینجا m_b رو داریم $\frac{1}{2}$

m اون خطی که معادلش رو میخواهیم

$y=4$

$y-4=\frac{1}{2}(x-(-2))$

$y-4=\frac{1}{2}(x+2)$

$y=\frac{1}{2}x+1+4$

جواب $y=\boxed{\frac{1}{2}}x+5$

مختصات نقطه تلاقی دو خط

$y=ax+b$

a شیب یا ضریب زاویه

b عرض از مبدا

• مختصات نقاط تلاقی از طریق حل دستگاه دو معادله دو مجهولی قابل دستیابی است

مثال: مختصات تلاقی دو خط با معادله‌های زیر را بدست بیاورید.

$3x-4y+6=0$

$x-2y-3=0$

روش اول

۳ معادله خط‌ها به صورت زیر با شیب خط‌ها بیابید.

$۳x - ۴y + ۶ = ۰$

$x - ۲y - ۳ = ۰$

شیب خط

$\boxed{y = ax + b}$

$x - ۲y - ۳ = ۰$

$-۲y = -x + ۳$

$\frac{-۲y}{-۲} = \frac{x}{-۲} + \frac{۳}{-۲}$

$y = ۱/۲\, x - ۳/۲$

$\boxed{m = ۱/۲}$

$$-۳ \left\{ \begin{array}{l} ۳x - ۴y + ۶ = ۰ \\ x - ۲y - ۳ = ۰ \end{array} \right. \longrightarrow \left| \begin{array}{l} ۳x - ۴y + ۶ = ۰ \\ -۳x + ۶y + ۹ = ۰ \end{array} \right.$$

$۰ + ۲y + ۱۵ = ۰ \longrightarrow ۲y = -۱۵$

$y = \frac{-۱۵}{۲} \longrightarrow y = -۷٫۵$

$x - ۲y - ۳ = ۰$

$x - ۲(-۷٫۵) - ۳ = ۰$

$x + ۱۵ - ۳ = ۰$

$x + ۱۲ = ۰$

$x = -۱۲$

نقطه تلاقی

$-۱۲ \quad x$

$-۷٫۵ \quad y$

روش دوم

روش حذفی

$۳x - ۴y + ۶ = ۰$

$x - ۲y - ۳ = ۰$

$$\begin{array}{r|l} -۲ & ۳x - ۴y + ۶ = ۰ \\ +۴ & x - ۲y - ۳ = ۰ \end{array}$$

$\downarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} -۶x + \cancel{۸y} - ۱۲ = ۰ \\ ۴x - \cancel{۸y} - ۱۲ = ۰ \end{array} \right.$$

$-۲x - ۲۴ = ۰$

$\boxed{-۲x} = ۲۴$

$x = \frac{۲۴}{-۲} = -۱۲$

$\boxed{x = -۱۲}$

عبارت به طرف دیگر ببری

+ و − تغییر می‌کنه

ولی ~~ضرب~~ تقسیم تغییر نمی‌کنه

منفی منفی میشه

مثبت مثبت

$x - ۲y - ۳ = ۰$

$-۱۲ - ۲y - ۳ = ۰$

$-۲y = ۱۵$

$\boxed{y = \frac{۱۵}{-۲} = -۷٫۵}$

ضرب است که اول طرف دوم منتقل می‌شود

تمرین: نقاط تلاقی دو خط را پیدا کنید

$$\begin{cases} ٤x - ٥y + ٦ = ٠ \\ ٥x - ٤y - ٦ = ٠ \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} -٥ & ٤x - ٥y + ٦ = ٠ \\ ٤ & ٥x - ٤y - ٦ = ٠ \end{array}$$

$$\begin{cases} -٢٠x + ٢٥y - ٣٠ = ٠ \\ ٢٠x - ١٦y - ٢٤ = ٠ \end{cases}$$

$$٩y - ٥٤ = ٠$$

$$٩y = ٥٤$$

$$y = \frac{٥٤}{٩} \qquad \begin{bmatrix} ٦ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y = ٦}$$

$$٤x - ٥(٦) + ٦ = ٠$$

$$٤x - ٣٠ + ٦ = ٠$$

$$٤x - ٢٤ = ٠$$

$$٤x = ٢٤ \qquad x = \frac{٢٤}{٤} \qquad \boxed{x = ٦}$$

روش جاگذاری

$$\begin{cases} ٤x - ٥y + ٦ = ٠ \\ ٥x - ٤y - ٦ = ٠ \end{cases}$$

حالا این رو جایگزین ها میکنیم

$$٤x - ٥y + ٦ = ٠$$

$$٤x = ٥y - ٦$$

$$\left(x = \frac{٥y}{٤} - \frac{٦}{٤} \right)$$

$$٥\left(\frac{٥y}{٤} - \frac{٦}{٤}\right) - ٤y - ٦ = ٠$$

$$\frac{٢٥y}{٤} - \frac{٣٠}{٤} - ٤y - ٦ = ٠$$

$$\frac{٢٥y}{٤} - ٤y = \frac{٣٠}{٤} + ٦$$

$$\frac{٢٥ - ١٦y}{٤} = \frac{٣٠ + ٢٤}{٤}$$

$$\frac{٩y}{٤} = \frac{٥٤}{٤}$$

$$y = \frac{\frac{٥٤}{٤}}{\frac{٩}{٤}} = \frac{٥٤ \times \cancel{٤}}{٩ \times \cancel{٤}} = ٦$$

$$٤x - ٥(٦) + ٦ = ٠$$

$$٤x - ٣٠ + ٦ = ٠$$

$$٤x - ٣٠ = -٦$$

$$٤x = ٢٤ \qquad x = ٦$$

$$٤x = \qquad x = \frac{٢٤}{٤} \qquad \boxed{y = ٦}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x & ٦ \\ y & ٦ \end{matrix}}$$

Sa Su Mo Tu We Th Fr

Subject: Date:

نقاط تلاقی دو خط را پیدا کنید

روش حذف

$$\begin{array}{r|l} ٦ & ٣x - ٨y + ٣ = ٠ \\ -٨ & ٢x - ٦y + ٥ = ٠ \end{array}$$

$$\begin{cases} ١٨x - ٤٨y + ١٨ = ٠ \\ -١٦x + ٤٨y - ٤٠ = ٠ \end{cases}$$

$$٢x - ٢٢ = ٠$$

$$٢x = ٢٢ \qquad x = \frac{٢٢}{٢} \qquad x = ١١$$

$$٣(١١) - ٨y + ٣ = ٠$$

$$٣٣ - ٨y + ٣ = ٠$$

$$٣٣ + ٣ = ٨y$$

$$٣٦ = ٨y$$

$$y = \frac{\cancel{٣٦}^{\,٩}}{\cancel{٨}_{\,٢}} = \frac{٩}{٢}$$

$$\begin{bmatrix} ١١ \\ \frac{٩}{٢} \end{bmatrix}$$

$$٣x = ٨y - ٣$$

روش جانشین

روش جانشین

$$\begin{cases} ٣x - ٨y + ٣ = ٠ \\ ٢x - ٦y + ٥ = ٠ \end{cases}$$

$$٣x = ٨y - ٣$$

$$x = \frac{٨}{٣}y - \frac{٣}{٣}$$

$$\boxed{x = \frac{٨}{٣}y - ١}$$

$$٢\left(\frac{٨}{٣}y - ١\right) - ٦y + ٥ = ٠$$

$$\frac{١٦}{٣}y - ٢ - ٦y + ٥ = ٠$$

$$\frac{١٦}{٣}y - \frac{٦}{١}y = ٢ - ٥$$

$$\frac{١٦ - ١٨}{٣}y = -٣$$

$$-\frac{٢}{٣}y = -\frac{٣}{١}$$

$$y = \frac{-\frac{٣}{١}}{-\frac{٢}{٣}}$$

$$y = \frac{-٣ \times ٣}{-١ \times ٢} \quad \boxed{+\frac{٩}{٢}}$$

$$٣x - ٨\left(\frac{٩}{٢}\right) + ٣ = ٠$$

$$٣x - \frac{٧٢}{٢} + ٣ = ٠$$

$$٣x = \frac{٧٢}{٢} - \frac{٣}{١}$$

$$٣x = \frac{٧٢ - ٦}{٢}$$

$$٣x = \frac{\cancel{٦٦}^{\,٣٣}}{٢}$$

$$٣x = ٣٣$$

$$x = \frac{٣٣}{٣}$$

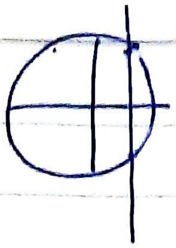
$$x = ١١$$

۱۴۰۲/۱/۲۳ جلسه چهارم

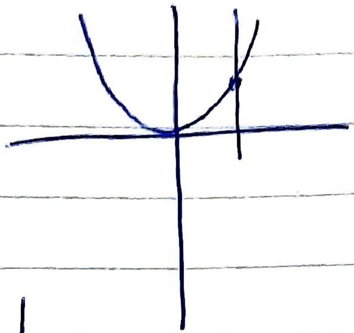
Subject: Date: Sa Su Mo Tu We Th Fr

$x^2 - 2y^2 = 1$

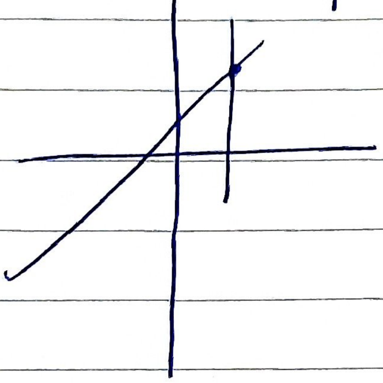
تابع نیست



$y = x^2$

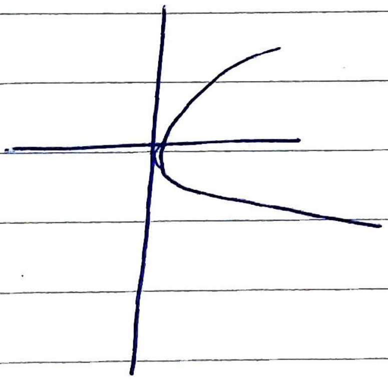


$y = x$



$x = y^2$

تابع نیست



$$\xrightarrow{x} \boxed{f(x)} \longrightarrow y$$

ورودی خروجی

برد

D R

subject: date:

در تابع ۴ حالت داریم.

۱- تابع حقیقی : دامنه ← R دنبال چیزی نمی‌گردیم $D_f = \{R\}$

۲- کسری : مخرج نباید صفر شود. تابع مخرج $\neq 0$

$f(x) \neq 0 \rightarrow$ وقتی می‌خواهیم دامنه را پیدا کنیم $\xrightarrow[f(x)]{}$ {x‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند} - R : دامنه

$D_f = R - \{$ [illegible] $\}$

۳- رادیکال : عبارت یا تابع زیر رادیکال می‌بایست بزرگتر یا مساوی صفر شود.

$\sqrt{f(x)} \rightarrow$ وقتی دامنه پیدا کنیم $\rightarrow f(x) \geq 0$

۴- رادیکال در کسر باشد. مخرج

$\dfrac{\text{صورت}}{\sqrt{f(x)}}$ مخرج $\longrightarrow f(x) > 0$

↓

چون تابع هم زیر رادیکال است

هم در مخرج کسر

نکته : زمانی که تابع در کسر یا رادیکال ما به فرم درجه دو باشد

ابتدا باید ریشه‌ها را پیدا کنیم سپس جدول تعیین علامت

تمرین

ect:

date:

حل معادله درجه ۲:

$$\underbrace{۵x^۲}_{a}+\underbrace{۳x}_{b}+\underbrace{۳}_{c}=۰$$

$\Delta = b^۲ - ۴ac \rightarrow \Delta = (۳)^۲ - ۴(۵)(۳)$

$\Delta = ۹ - ۶۰ \rightarrow \Delta = -۵۱$

$\Delta = ۰$ ریشه مضاعف داریم

$\Delta > ۰$ و $+$ دو ریشه حقیقی داریم

$\Delta < ۰$ و $-$ کاری نداریم

حل معادله درجه ۲:

$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$

$\Delta = b^۲ - ۴ac$

$\Delta = (-۳)^۲ - ۴(۱)(۲) \rightarrow \Delta = ۹ - ۸ \qquad \Delta = ۱$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \qquad \frac{-(-۳) \pm \sqrt{۱}}{۲} = \frac{۳ \pm ۱}{۲}$$

$$\frac{۳+۱}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \qquad \frac{۳-۱}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

(۱ و ۲)

تمرین

دامنه تابع را به دست آورید:

$D_f = \frac{۲}{۵x+۲}$

$۵x + ۲ = ۰$

$۵x = -۲$

$x = \frac{-۲}{۵} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{۲}{۵}\}$

subject: date: تمرین

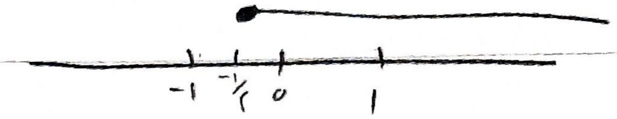
دامنه تابع را بدست آورید

$f(x) = \sqrt[4]{2x+1}$

$2x+1 \geq 0$

$2x \geq -1$

$x \geq -\frac{1}{2}$



$D_f = [-\frac{1}{2}, \infty)$

$f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ $D_f = \mathbb{R}$

دقیقاً مثل تابع خطی میمونه

وقتی رادیکال یا ریشه با فرجه فرد هسته دامنه اش

وقتی فرجه فرد باشه زیر رادیکال میتونه منفی باشه

$\sqrt[\text{فرد}]{-}$

ولی وقتی فرجه زوج است زیر رادیکال حتما + است

$\sqrt[\text{زوج}]{+}$

هر رادیکالی که عددی کنار فرجه نباشه یعنی ۲ است

$\sqrt[\bigcirc]{\ }$

جای فرجه ۲ زوج

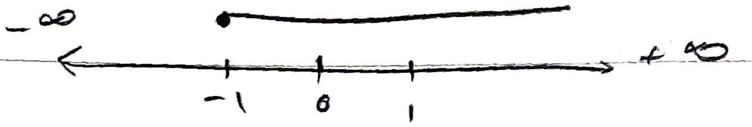
subject: $f(x) = \sqrt{۲x+۲}$ date: پیدا کردن دامنه تابع

$۲x + ۲ \geq ۰$

$۲x \geq -۲$

$x \geq -\frac{۲}{۲}$

$x \geq -1$



$D_f = [-1, +\infty)$

D.f → Domain Functional

Subject: Date: Sa Su Mo Tu We Th Fr

۱ توابع خطی $y = ax^n + a$

کسری نیست و زیر رادیکال نیست به این توابع، توابع خطی می‌گویند

$Df = \mathbb{R}$ → اعداد حقیقی

$y = ۳x^۲ - ۴$ دامنه می‌شه IR اگه بخوایم بنویسیم:

$\rightarrow Df = \mathbb{R}$

$fx = ۳x^۲ - ۴$ جایگذاری x

$\mathbb{R} = (-\infty, ۰] \cup [۰, +\infty)$

دامنه تمام توابع خطی مجموعه می‌شه (IR)

۲ توابع کسری

$$\frac{ax+b}{cx-d}$$

$cx - d \neq ۰$ ← ریشه‌های مخرج

$\boxed{Df = \mathbb{R} - \varepsilon}$ ریشه‌های مخرج

توابع کسری فقط مخرج را باید ≠ ۰ کرد

مخرج‌ها یا مخرج صفر نشود مثل تیم تابع کسری

$$f(x) = \frac{۳x^۲ - ۸x - ۴}{۲x + ۲}$$

پس $۲x + ۲ = ۰$ $D = \mathbb{R} - \{-۱\}$

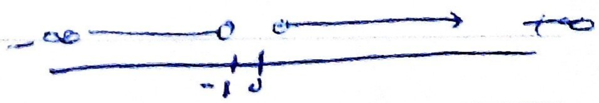
$۲x = -۲$

$x = -\frac{۲}{۲} = -۱$

همه اعداد را می‌پذیرد الی به جز ریشه‌های مخرج

$(۲x + ۲ \neq ۰)$

$x = -\frac{۲}{۲} = -۱$



دامنه $\mathbb{R} - \{-۱\}$

$(-\infty, -۱) \cup (-۱, +\infty)$

Subject　　　Date:

$x \geq 0$

توابع رادیکالی

اگر دامنه تابع یک رادیکال را بخواهیم بگیریم

$\sqrt{f(x)} = 0$

باید رادیکال بزرگتر و مساوی صفر باشه.

$\sqrt{fx} \geq 0$

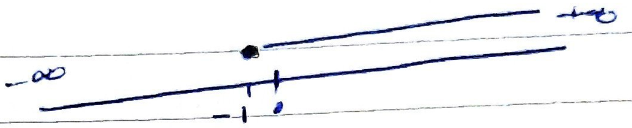
$f(x) = \sqrt{2x+2}$ دامنه تابع را بیابید:

$2x+2 \geq 0$

$2x \geq -2$

$x \geq -\frac{2}{2}$

$x \geq -1$　　$[-1, +\infty)$



رادیکال $\sqrt{-2}$ نداریم

★ چون فرجه اصلی همه رادیکال‌ها وقتی فرجه ننوشته باشیم ۲

از ترکیب تابع کسری و رادیکالی چه نتیجه‌ای می‌گیریم.

تابع کسری و رادیکالی

$$\frac{ax+b}{\sqrt{bx+c}}$$

$x > 0$ اگر دامنه تابع یک رادیکال که در مخرج را بخواهیم

چون در مخرج صفر نباید باشه و مساوی صفر هم نباید باشه

۳- به شرط اینکه مخرج نباید مساوی صفر نباشد.

[illegible]

مخرج کسر نباید صفر شود

عبارت زیر رادیکال نباید منفی شود

$$\frac{4x-4}{\sqrt{2x+2}}$$

$\sqrt{} > 0$

باید رادیکال بزرگتر از صفر باشه.

$\sqrt{2x+2}$　$(-1, +\infty)$

دامنه تابع را پیدا کنید:

$K_x = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0$

معادله درجه ۲

ریشه یابی می کنیم.

مرحله اول $\underset{a}{x^2} - \underset{b}{3x} - \underset{c}{4} = 0$

فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-4)$

$\Delta = 9 + 16$ $\Delta = 25$

مرحله دوم $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{+3 \pm 5}{2}$

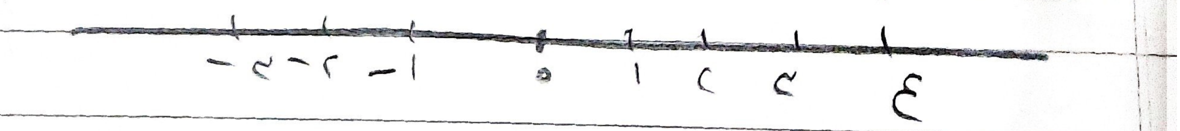
$\frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$ $\frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$

ریشه‌ها $\left|\begin{array}{l} -1 \\ 4 \end{array}\right.$

مرحله سوم

		-1		4	
x					
تعیین علامت x^2-3x-4	−		+		+
با اتصال x^2-3x-4	−		−		+
	+		−		+

مرحله چهارم



$D_f = \mathbb{R} - (-1, +4)$

$\sqrt{۲x+۲} \geq ۰$ $x \geq -۱$ $(-۱, +\infty)$

✓ درست $\sqrt{۲x+۲} \geq ۰$

تابع نمایی و تابع لگاریتمی

لگاریتم $a^۲ = x$ لگاریتم لگاریتم

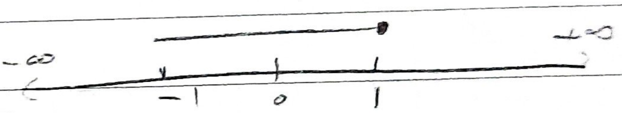
Lg a^x

Ln e^x $Ln = Log_e$

تمرین :

دامنه تابع زیر را تعیین کنید

$f_x = \sqrt{۱-x}$



$۱-x \geq ۰$

$-x \geq -۱$

$x \leq ۱$

$D_f = (-\infty, +۱]$

$y(x) = \sqrt{۲-x^۲}$ $۲-x^۲ \geq ۰$

$۲-x^۲ = ۰$ $\underbrace{-x^۲}_{a} + \underbrace{۲}_{c} = ۰$

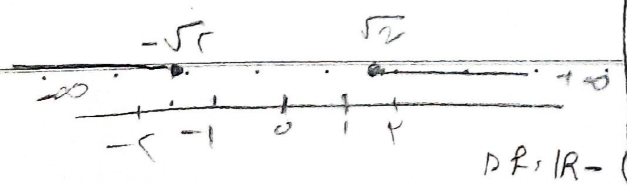
$\sqrt{۸} = \sqrt{۲^۳} = \sqrt{۲^۲ \times ۲} = ۲\sqrt{۲}$

$\Delta = b^۲ - ۴ac \rightarrow \Delta = -۴ \times (-۱)(۲) = +۸$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$ $\frac{\pm\sqrt{۸}}{۲(-۱)} = \frac{\pm ۲\sqrt{۲}}{-۲}$ $\frac{\cancel{+۲}\sqrt{۲}}{\cancel{-۲}}$ $\frac{\cancel{-۲}\sqrt{۲}}{\cancel{-۲}}$ $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

جلسه قبل ← $k_x = \sqrt{x^۲-۳x-۴}$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$\sqrt{۲-x^۲}$	−		+		+
$\sqrt{۲-x^۲}$	−		−		+
	+		−		+



$D_f = \mathbb{R} - (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

زیر رادیکال توش منفی نمی‌شه زوج است (۰،۱،۲) نباید منفی باشد $\sqrt{\ }$ فرجه زوج ۲،۰

ص ۱۲۵

Sa Su Mo Tu We Th Fr

تمرین

Subject: Date:

$$h(x) = \begin{cases} x-2 & x<0 \\ x^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$$

$D = \{x<0\} \cup \{x \geq 0\}$

$x-2 \quad x<0 \quad \mathbb{R}$

چون تو مخرج رادیکال هم هستیم باید بزرگتر از صفر

$$f(x) = \frac{2x^2-5x}{\sqrt{x^2-4}} \qquad x^2-4>0$$

$\underset{a}{x^2} - \underset{c}{4} = 0$

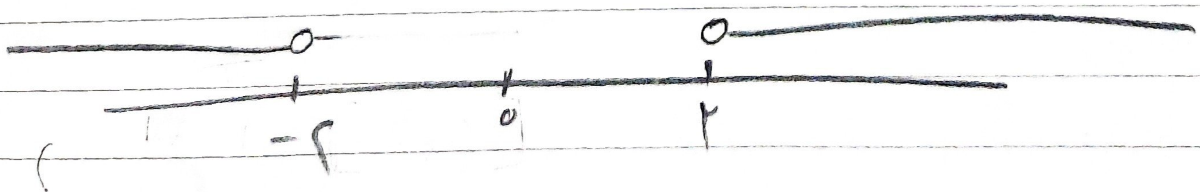
$\Delta = b^2-4ac = -4\times(1)\times(-4) = +16$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{\pm 4}{2} \quad \frac{4}{2}=2 \quad \frac{-4}{2}=-2$$

ریشه‌ها | 2, -2

جدول تعیین علامت زیر رادیکال

x		-2		2	
x^2-4	$-$		$+$		$+$
x^2-4	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$



$D_f = \mathbb{R} - [-2,2]$

Subject: Date:

Sa Su Mo Tu We Th Fr

وقتی که توان منفی است جواب کسری می‌شود:

$۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰^{۳}} = \frac{۱}{۱۰۰۰}$

$۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^{۳}} = \frac{۱}{۸}$

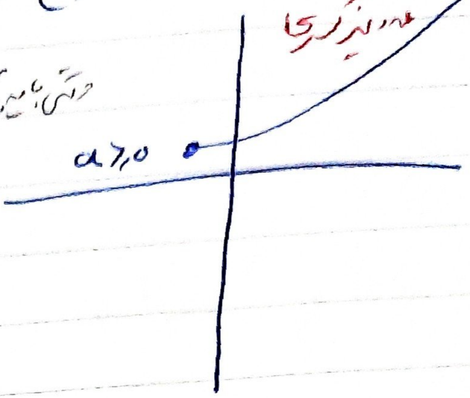
هر تابعی به توان a^x تابع نمایی گفته می‌شود.

توان → توان

$a^x \times a^y = a^{x+y}$ ← وقتی پایه‌ها یکی باشد

پایه‌ها برابر ← پایه

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

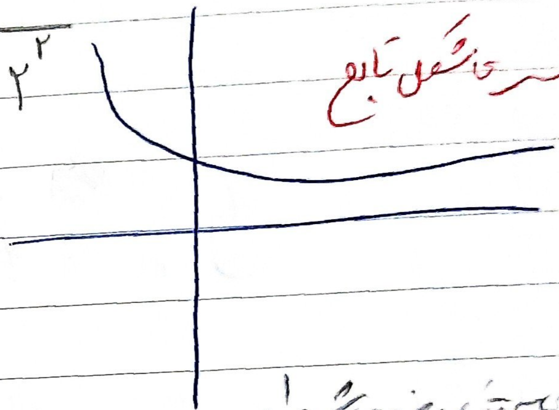


برای از بین بردن منفی

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰^{۳}} = \frac{۱}{۱۰۰۰}$

$۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^{۲}}$



$(a^x)^y = a^{xy}$

$(۲^{۲})^{۳} = ۲^{۶}\ (۲\times۳)$

هر عدد به توان صفر شود ۱.

مثال:

$۳^{۰} = ۱$

$a^0 = 1$

$۲^{۵} \times ۲^{۳} = ۲^{(۵+۳)} = ۲^{۸}$

با پایه‌های یکسان توان‌ها را جمع می‌کنیم

$\frac{۲^{۵}}{۲^{۳}} = ۲^{۵-۳} = ۲^{۲}$

$۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^{۲}}$

حل این مسیر را [illegible]

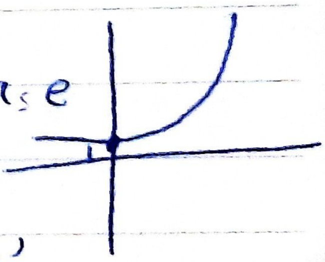
$(۲^{۲})^{۳} = ۲^{۲\times۳} = ۲^{۶}$

در ریاضی عددی داریم به نام عدد نپر

عدد نپر $e = ۲,۷۱$

۲,۸۱

۲,۸۲



$e^x = \exp x$

اکس پاین

$\exp(x)$

$\text{Log}_{5}^{a} = -x \rightarrow -\text{Log}_{5}^{a}$

Subject: تعریف لگاریتم $\quad$ Date: $\quad$ Sa Su Mo Tu We Th Fr

$5^{2} = 25$ $\qquad a^{y} = x$

عدد

$\log_{5}^{\boxed{25}} = 2$ $\qquad \log_{a}^{x} = y$

مبنا $\qquad$ توان

$\text{Log}_{e}^{x} = \text{Ln}$

۲٫۷۱
۲٫۸۱
۲٫۸۲

تمرین: خواص لگاریتم را پیدا کنید

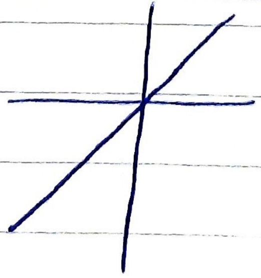
$\log_{a}^{x \wedge y} = \log_{a}^{x} + \log_{a}^{y}$

$\log_{a}^{\frac{x}{y}} = \log_{a}^{x} - \log_{a}^{y}$

دو تا تابع دیگه هم داریم: تابع قدر مطلق و جزء صحیح

تابع قدر مطلق $|x|$ یعنی x مثبت شده ده ـــه یعنی خود عدد مثبت منفی‌ها

$y = x$



این صورت ... مشابه

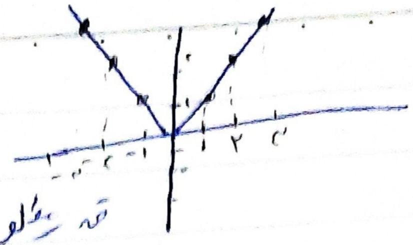
$x = |-2| = y = 2$

$x = |1| = y = 1$

Subject: Date:

Sa Su Mo Tu We Th Fr

|۲| = ۲



قدر مطلق یعنی فقط
مقدار مثبت داره

|۴| = ۴

|-a| = a

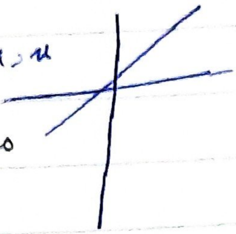
تابع جزء صحیح یا تابع پلکانی

دامنه و برد اعداد حقیقی است

f(x) = x

تابع همانی

همه رو به نیمساز ربع اول و سوم



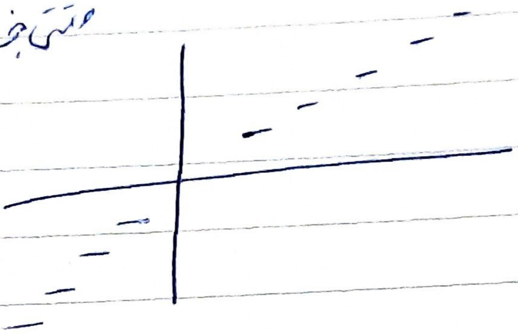
x = ۱ ، y = ۱

x = -۱ ، y = -۱

x = ۰ ، y = ۰

نمونه

اعداد جزء صحیح می‌شه



جزء صحیح پلکانی است

جزء صحیح این علامت است

[۲] = ۲

[۲٫۱] = ۲

اعشار رو برمی‌داریم به سمت

[-۲] = -۲

[-۲٫۱] = -۳

جزء صحیح به سمت عدد کوچکتر

-۲ > -۲٫۱

چون عدد به سمت کوچکتر میره
تو حالت

جزء صحیح ۰٫۵ می‌شه ½

[۰٫۵] = ۰

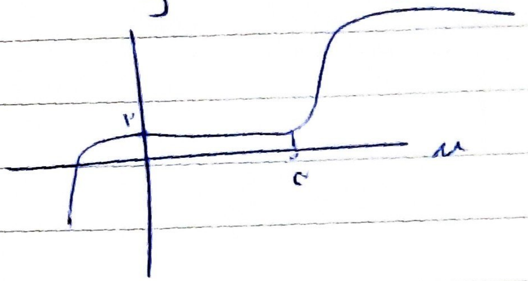
صفر

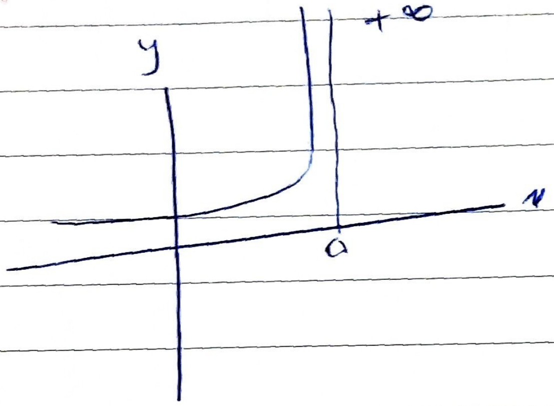
عدد بین صفر و یک، جزء صحیحش میشه صفر

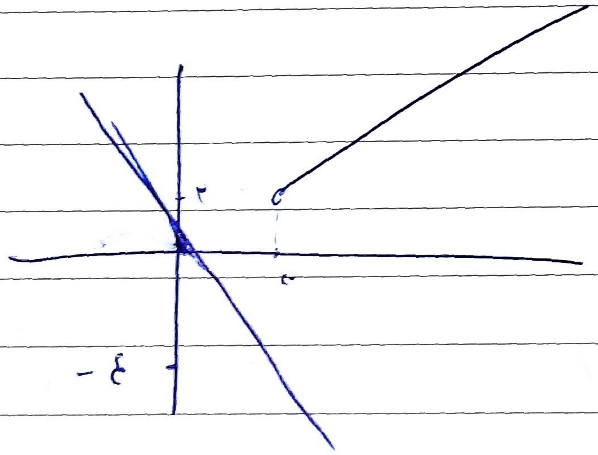
Subject: Date:

Sa Su Mo Tu We Th Fr

حد و پیوستگی



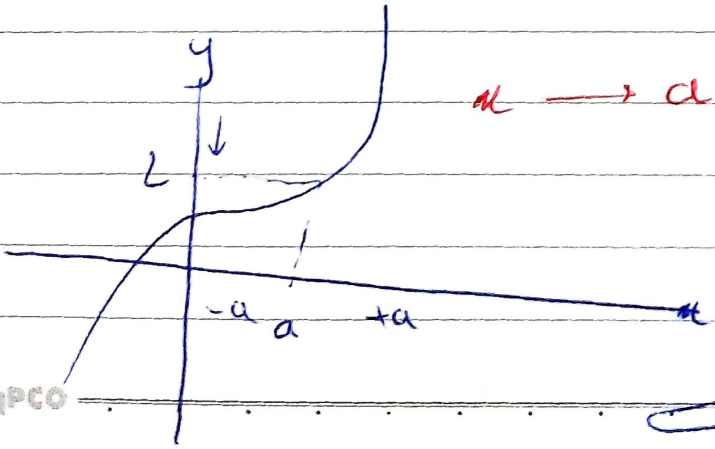




مفهوم حد و پیوستگی

لیمیت حد

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$



مفهوم میل کردن

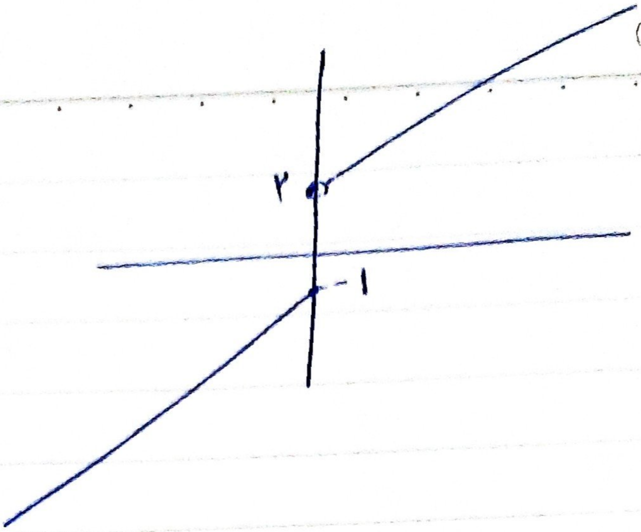
میل کردن از سمت چپ

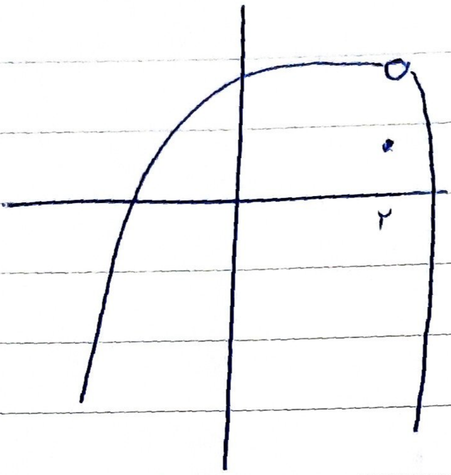
میل کردن از سمت راست

$\lim\limits_{x \to ۰} fx$

$۰^{-} = -۱$ شر

$۰^{+} = ۲$ شر





$۲^{-} = ۴$

$۲^{+} = ۴$

تمرین:

$\log_{۳} x = -۲$ $\quad x = ۳^{-۲}$

$۳^{-۲} = x \longrightarrow \frac{۱}{۳^{۲}} = x \qquad x = \frac{۱}{۹}$

منفی‌ها رو میبریم میاد تو مخرج کسر و توانش مثبت میشه.

$۳^{-۲} \longrightarrow \frac{۱}{۳^{۲}} = \frac{۱}{۹}$

$\underbrace{۳(۳)^{x}}_{۳^{x+۱}} = (\underset{\downarrow}{۲۷})^{۲x}$

$۳^{x+۱} = (۳^{۳})^{۲x}$ ضرب میشن

$۳^{x+۱} = ۳^{۶x}$

$x+۱ = ۶x \qquad ۱ = ۶x-۱x \qquad ۵x = ۱ \qquad ۱ = ۵x \qquad \boxed{x = \frac{۱}{۵}}$

تمرین

Subject: Date:

Sa Su Mo Tu We Th Fr

$\log_{۲} ۲۵۶ = x$

$۲^{x} = ۲۵۶$

$(۲)^{x} = (۲)^{۸}$ $\boxed{x = ۸}$

پایه‌ها مساوی

$\log_{۳} \frac{۱}{۸۱} = x$

$۳^{x} = \frac{۱}{۸۱}$

$(۳)^{x} = \frac{۱}{۳^{۴}} = ۳^{-۴}$

$\boxed{x = -۴}$

توان ۴ از مخرج میره بالا منتقل میشه.

$۵^{-x} = a$

$a = \frac{۱}{۵^{x}}$ ← تبدیل شود.

$\log_{۵} a = -x$

$x = -\log_{۵} a$

$\log_{۳} x = -۲$

$۳^{-۲} = x$

$\frac{۱}{۳^{۲}} = x$ $x = \frac{۱}{۹}$

$\log_{\sqrt{۵}} ۶۲۵ = x$

$\boxed{\sqrt[۲]{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}}}$

$\sqrt{۵}^{x} = ۶۲۵$

$(۵^{\frac{۱}{۲}})^{x} = ۵^{۴}$

$\frac{۱}{۲} x = ۴$ $x = \frac{۴}{\frac{۱}{۲}}$

$\boxed{x = ۸}$

PAPCO

Subject $۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^{۲}}$ Date ★ $\text{Log}_{⑤}^{۲}$ (Sa) (Su) (Mo) (Tu) (We) (Th) (Fr)

وقتی پایه چیزی ننوشته باشیم یعنی عدد ۱۰ را در نظر بگیریم.

$\text{Log}_{\sqrt{۵}}^{۶۲۵} = x \qquad \sqrt{۵}^{\,x} = ۶۲۵$

$(۵^{\frac{۱}{۲}})^x = ۶۲۵ = ۵^۴ \qquad (۵^{\frac{۱}{۲}})^x = ۵^۴$

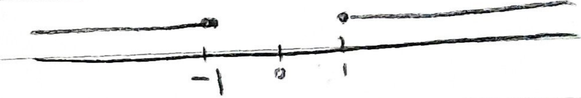
$\frac{۱}{۲} \times x = ۴ \longrightarrow x = ۸$

دامنه تابع

$f(x) = \sqrt{۱ - x^۲} \qquad ۱ - x^۲ \geq ۰$

$\underset{a}{-x^۲} + \underset{c}{۱} = ۰ \qquad \Delta = b^۲ - ۴ac \qquad \Delta = -۴(-۱)(۱) = +۴$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{\pm\sqrt{۴}}{۲(-۱)} = \frac{\pm ۲}{-۲}$ $\quad +۱$ و -۱ $\qquad D_f : \mathbb{R} - (-۱, ۱)$

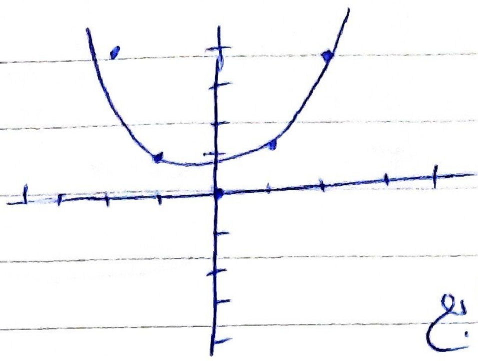


x	-۱		۱	
$۱-x^۲$	$-$	$+$	$+$	
$۱-x^۲$	$-$	$-$	$+$	
	$\cancel{+}$	$-$	$+$	
	غ		غ	

$\sqrt[۴]{-۱۶}$ وقتی فرجه زوج است نباید عدد منفی زیر رادیکال داشته باشیم و این غلط است.

$f(x) = y = x^2$

x	y
۰	۰
۱	۱
۲	۴
-۱	۱
-۲	۴

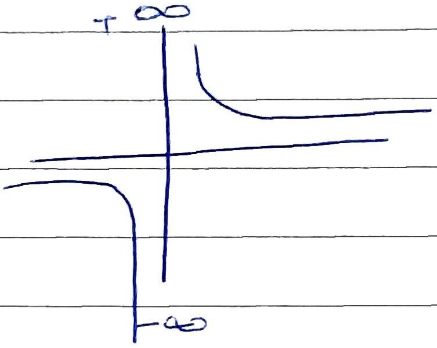


حد تابع $\lim f(x)$

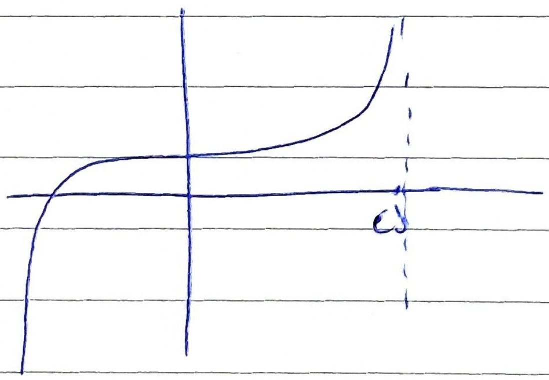
$x \to a$

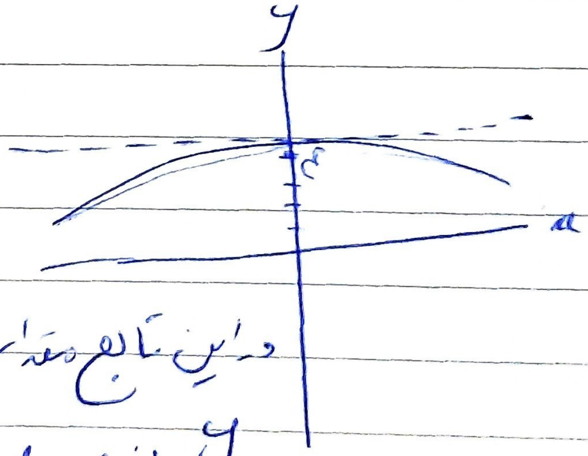
x به سمت a میل می کند

$f(x) = \frac{1}{x}$

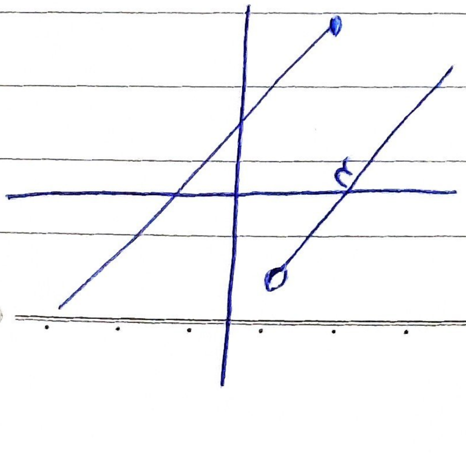


مفهوم میل کردن:
یعنی نزدیک شدن بیش از حد
به عدد ۵ از طرفین



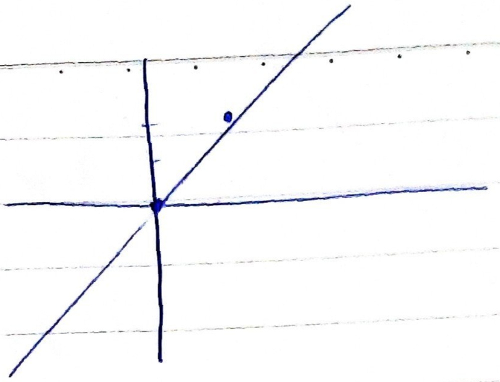


در این تابع مقدار
y از ۴ بیشتر نمیشه



f(x) = ۲x

x	y
۰	۰
۱	۲



lim f(x)

آنگاه x → ۳ میل کند

یعنی ۳ را به جای x قرار می‌دهیم

f(x) = ۲x

f(x) = ۲(۳) = ۶

lim (۳x−۱) (۳×(−۱))−۱ = −۳−۱ = −۴

x → −۱

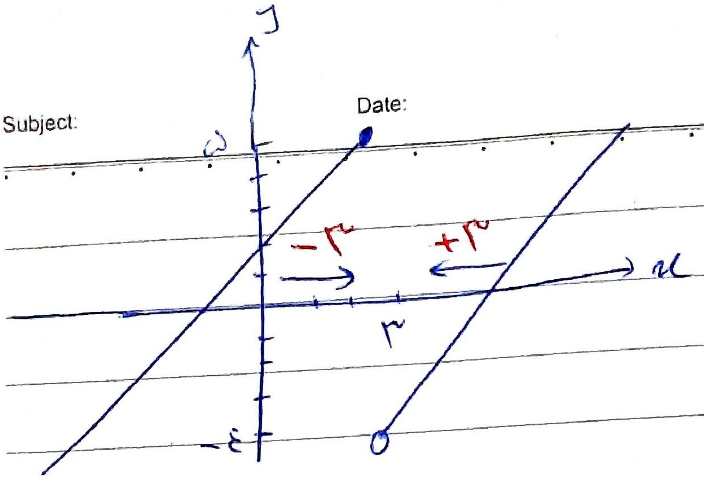
f(x) = ۲x = ۱۰

x → ۵

lim f(x) = lim (۲x)

x → ۵ x → ۵

۲(۵) = ۱۰



$f(3)=5$

$\lim_{x\to 3} f(x)$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=5$

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=-4$

3^- کمتر

3^+ بیشتر

$f(3)=5$

در حد رفتار تابع را در نقاط خاص تابع جاهایی که یا تابع شکستگی یا پرش دارد یا نقاط واحدی ندارد را بررسی می‌کنیم

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ حد چپ

حدهای دو طرفه

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\lim_{x\to a^+} f(x)$ حد راست

subject: date:

وقتی تابعی را حل می‌کنیم ممکنه در اون نقطه حدش گسسته باشه ولی حد راست و حد چپ می‌تونه ناگسسته باشد.

تمرین

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} \qquad \frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{0} = \frac{0}{0}$$ حالت مبهم

در حد رفع ابهام می‌کنیم

فرمول

قانون مزدوج

$$\boxed{(x+a)(x-a) = x^2 - a^2}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\overset{(x-3)(x+3)}{x^2-9}}{x-3} \to \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3) \qquad x \to 3$$

$$3+3 = 6$$

وقتی $x \to 3$ میل می‌کنه یعنی L به سمت 6 نزدیک می‌شود.

مخرج را یکبار در مخرج

دیگر بار در صورت می‌نویسیم

یکبار منفی و یکبار مثبت

تمرین

$$\lim \frac{\sqrt{x+۹}-۳}{x}$$

$x \to ۰$

$$\frac{\sqrt{۰+۹}-۳}{۰} = \frac{\sqrt{۹}-۳}{۰} = \frac{۳-۳}{۰} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

رفع ابهام می‌کنیم

هر عددی تقسیم بر صفر می‌شه بی‌نهایت

$\frac{\text{عدد}}{۰} = \infty$

عامل صفرساز

رفع ابهام

ریشه صفرساز را از بین می‌بریم.

$$\lim \frac{\sqrt{x+۹}-۳}{x}$$

$(x+a)(x-a) = x^۲-a^۲$

$x \to ۰$

مزدوجش می‌شه

$$\frac{\overset{a}{\sqrt{x+۹}}\ \overset{b}{-۳}}{x} \times \frac{\sqrt{x+۹}+۳}{\sqrt{x+۹}+۳} = \lim \frac{x+۹-۹}{x(\sqrt{x+۹}+۳)}$$

عبارت رادیکال

x ها با هم ساده می‌شه

۹ از زیر رادیکال میاد بیرون می‌شه ۳ رادیکال ... می‌شه

$۳+۳$

$$\lim \frac{x+۰}{\sqrt{x+۹}+۳} = \lim \frac{x}{۳+۳} = \frac{۱}{۶}$$

ساده شده است

هر رادیکالی به توان دو برسه خودش

$(\sqrt{x+۹})^۲ = x+۹$

$(\sqrt{x+۹})^۲-(۳)^۲$ $x+۹-۹$

subject: date:

تمرین:

$$\lim \frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}$$

$$\frac{\sqrt{۴}-۲}{۴+۴} = \frac{۲-۲}{۰} = ۰$$

مبهم

رفع ابهام می‌کنیم

$$(x+a)(x-a) = x^۲ - a^۲$$

$$\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} \times \frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲} = \frac{(\sqrt{x})^۲-(۲)^۲}{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$\frac{\cancel{x-۴}}{\cancel{(x-۴)}(\sqrt{x}+۲)} = \frac{۱}{\sqrt{x}+۲} \qquad \lim \frac{۱}{\sqrt{۴}+۲}$$

$$x \to ۴$$

$$\lim \frac{۱}{۲+۲} = \frac{۱}{۴}$$

$x \longrightarrow ۴$

میل می‌کند

∝ ۲ ۳

بررسی حد چپ و حد راست

تابع $f(x)$ دارای حد است هرگاه حد چپ و حد راست آن با هم برابر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x-۲ & x \geq ۱ \\ ۵x+۴ & x < ۱ \end{cases}$$

حد تابع f را پیدا کنید در نقطهٔ $\underline{۱}$ اگر عدد را نگفتن مثلاً $\underline{۱}$ چون

$x \geq ①$

$x < ①$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) \qquad \lim_{x\to ۱^-} (۵x+۴) = ۹ \qquad x<۱$$

کمتر یعنی منفی است

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) \qquad \lim_{x\to ۱^+} (۳x-۲) \qquad x \geq ۱$$

تمرین

حد تابع زیر را در نقطه داده شده پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < ۱ \\ ۱ + x & x \geq ۱ \end{cases} \qquad \lim_{x \to ۱} f(x)$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) \quad -x \quad -(۱) = -۱ \qquad -x = -۱$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) \quad ۱ + x \quad ۱ + ۱ = ۲ \qquad ۱ + x = ۲$$

$\cancel{\times}$ حد چپ و حد راست مساوی نیست پس تابع حد ندارد.

$$f(x) \begin{cases} ۳ - x^۲ & x \leq ۱ \\ ۲ + x^۲ & x > ۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) \quad ۳ - x^۲ \quad ۳ - (۱)^۲ = ۲$$

$$۲ \neq ۳$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) \quad ۲ + x^۲ \quad ۲ + (۱)^۲ = ۳$$

حد چپ ≠ حد راست

تابع حد ندارد.

رادیکال منفی وجود ندارد تعریف نشده باشد .★

subject: date:

تمرین

$\lim \sqrt{4-x}$ $x=4$

$\lim f(x) = \sqrt{4-4^-} = \sqrt{0^+} = 0$

$x \longrightarrow 4^-$ حد چپ دارد.

$\lim f(x) \sqrt{3-3^+} = \sqrt{0^-}$

رادیکال منفی تعریف نشده یا وجود ندارد.

$x \longrightarrow 3^+$

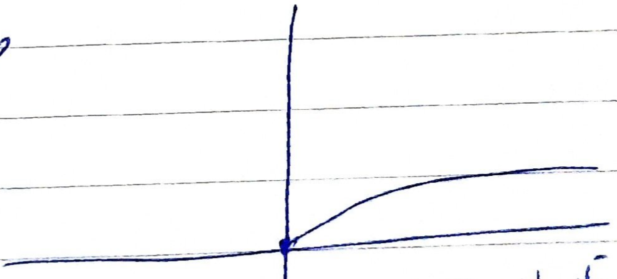
$\sqrt{3-4/01} = \sqrt{0/01}$

حد راست ندارد.

$\boxed{x = \sqrt{y}}$ حد تابع رادیکالی

x	y
0	0
-1	X
2	1/14
4	2

وجود ندارد



این تابع از سمت راست بهش نزدیک می‌شه

ولی از سمت چپ نه

تمرین سئوال امتحانی

subject: date:

مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع در نقاط مرزی دارای حد باشد

$$f(x) = \begin{cases} ۳x+۷ & x \leq ۴ \\ ۲ax-۱ & x > ۴ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۴^-} f(x) = \lim_{x \to ۴^-} (۳x+۷) = ۳(۴)+۷ = ۱۹$$

$$\lim_{x \to ۴^+} f(x) = \lim (۲ax-۱) = ۲a(۴)-۱ = ۸a-۱$$

برای اینکه f در x = ۴ حد داشته باشد باید حد چپ و راست f در این نقطه مساوی باشد یعنی

$$۸a-۱ = ۱۹$$

$$۸a = ۲۰$$

$$a = \frac{۲۰}{۸} = \frac{۵}{۲} \qquad a = \frac{۵}{۲} = ۲٫۵$$

به ازای $a = \frac{۵}{۲}$ تابع f در $x = ۴$ دارای حد است

subject: تمرین

date:

$\lim \begin{cases} -۲^- \\ -۲^+ \end{cases}$ $\lim \begin{cases} ۲^- \\ ۲^+ \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x < -۲ \\ ax+b & \cancel{-۲ <} x < ۲ \\ ۲x-۶ & x \geq ۲ \end{cases}$$

$-۲ < x < ۲$

$x = -۲$

$x - ۲$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -۲^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -۲} (x^۲) = (-۲)^۲ = \boxed{۴} \\ \qquad = \\ \lim\limits_{x \to -۲} f(x) = \lim\limits_{x \to -۲} (ax+b) = \boxed{-۲a+b} \end{array}\right\}$$

برای اینکه حد داشته باشه باید ۴ بالا رو با $-۲a+b$ را مساوی هم قرار دهیم

$$۴ = -۲a+b$$

$$\boxed{-۲a+b = ۴}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲} (ax+b) = +۲a+b \\ \qquad = \qquad ۲a+b = -۲ \\ \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = \lim (۲x-۶) = ۲(۲)-۶ = -۲ \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} -۲a+b = ۴ \\ ۲a+b = -۲ \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b = ۱ \\ a = -\frac{۳}{۲} \end{array}}$$

$۲a+b = -۲$

$۲a+۱ = -۲$

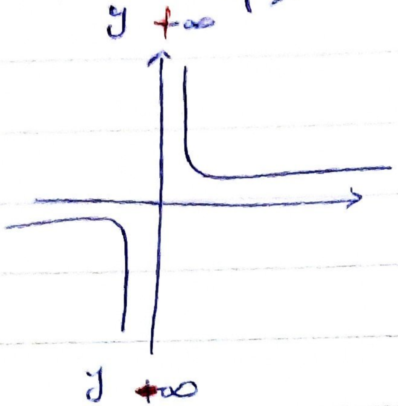
$۲a = -۲-۱$

$۲a = -۳ \qquad a = \frac{-۳}{۲}$

subject:

date: جلسه ششم ۱۴۰۲ ، ۲ ، ۱۳

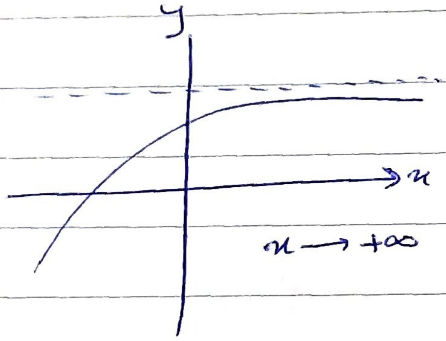
حد تعیین رفتار تابع را در نزدیکی نقاط خاص می‌سنجیم.



$x \rightarrow$ عدد

$y = \pm\infty$

حدهای بی‌نهایت



حد در بی‌نهایت

$x \longrightarrow \pm\infty$

$y \longrightarrow$ عدد

$a + (+\infty) = +\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$a - (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$a > 0$ $a \times (+\infty) = +\infty$

اینجا ابهام نداشتند چون علامت مشخص است.

$a \times (-\infty) = -\infty$

$a > 0$

$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) \times (+\infty) = -\infty$

$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$

subject:

date:

حالت‌های مبهم

$$\frac{0}{0}$$

$$0 \times \pm\infty$$

$$(+\infty) + (-\infty)$$

رفع ابهام می‌کنیم

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

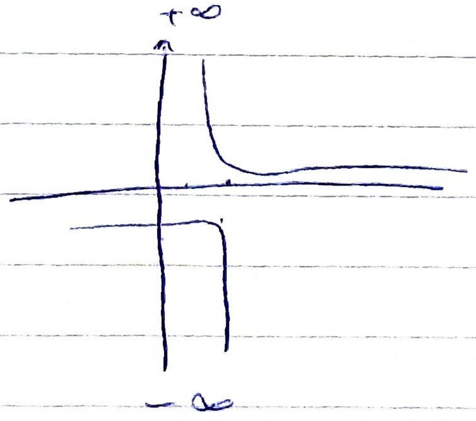
تمرین :

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x}{x-۲} \quad \frac{۲}{۲-۲} = \frac{۲}{0} = 0$$

$$\lim_{x \to ۲^{+}} \frac{x}{x-۲} = \frac{۲}{0^{+}} = \infty$$

$$\lim_{x \to ۲^{-}} \frac{x}{x-۲} = \frac{۲}{0^{-}} = -\infty$$

این تابع در نقطه ۲ دیواری دارد.



تمرین

subject: $\sqrt{4-x^2}$ date:

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \frac{\sqrt{4-(2)^2}}{2-2} = \frac{\sqrt{4-4}}{0} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$\lim_{x \to 2^-}$

۴ منهای ۴ بیشتر میشه صفر کمتر

$\sqrt{4-4^+} = \sqrt{0^-}$ X . صفر کمتر زیر رادیکال اصلا وجود ندارد ★

در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \times \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})}$$

$$\frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} =$$ در منفی ضرب می کنیم ↓

اتحاد مزدوج

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$4-x^2$

2^2-x^2

$$\frac{-(2-x)(2+x)}{-(x-2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{-(2-x)(2+x)}{\underset{(2-x)}{(-x+2)}\sqrt{4-x^2}} = \frac{-1(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$x \to 2^-$

$$\frac{-1(2+2)}{\sqrt{4-2^2}} = \frac{-1(2+2)}{\sqrt{0}} = \frac{-4}{\sqrt{0}} = \frac{-4}{0} = -\infty$$

در حدود بی نهایت

برای حل حدود بی نهایت

جمله بزرگترین توان صورت

جمله بزرگترین توان مخرج

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

بزرگترین توان یک است.

$$\frac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\boxed{ax^n} + bx^{n-1} + cx \dots}{\boxed{kx^n} + bx + \dots}$$

بزرگترین توان

$$\frac{ax^n}{bx^m} \rightarrow \begin{cases} 0 & \overset{\text{صورت}}{n} < \overset{\text{مخرج}}{m} \\ \frac{a}{b} & n = m \\ \pm\infty & n > m \end{cases}$$

تمرین

$2 < 5 \rightarrow 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{②} + 3x - 1}{4x^{⑤} - 2x} = \lim \frac{3x^2}{4x^5} = 0$$

توان مخرج بزرگتر از صورت است

مساوی صفر شد.

$$\lim \frac{۲x^۵ - ۴x + ۱}{۴x^۵ - x - ۱} = \frac{\lim ۲x^۵}{۴x^۵} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

توان صورت و مخرج مساوی است

میشه $\frac{a}{b}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۴x^۵ - x^۲ + ۱}{۲x^۴ - x} = \lim \frac{۴x^۵}{۲x^۴} = +\infty$$

توان صورت از مخرج بزرگتر است

میشه $\pm\infty$

تمرین

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^۲ + ۴}}{x - ۱} = \frac{x}{x} = ۱$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^۲ + ۲x + ۵} - x$$

مزدوج

$a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵} - x}{۱} \times \frac{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵} + x}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵} + x}$$

$\frac{\infty}{\infty}$

رفع ابهام می‌کنیم

$$\frac{\cancel{x^۲} + ۲x + ۵ - \cancel{x^۲}}{۱ \times \sqrt{x^۲ + ۲x + ۵} + x} = \frac{۲x + ۵}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵} + x} = \frac{۲x}{۲x} = ۱$$

$x \qquad x \to +\infty \qquad x$

حد این تابع در بی‌نهایت میشه ۱

حکم بزرگترین توان صورت

تقسیم بزرگترین توان مخرج

تمرین

subject:

date:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{2x-4} = \frac{x}{2x} = \frac{a}{b} = \frac{1}{-2}$$

$$\frac{+x}{-2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4x-1}} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$$

حد زیر را حل کنید

تمرین در منزل

[illegible]

$$\frac{\sqrt{x^2+x} - x}{x \to +\infty} \times \frac{\sqrt{x^2+x} + x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x} + x} =$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$x \qquad = 2x \qquad x$

$\frac{a}{b}$ توان بیشتر

توان = توان مخرج

حد زیر را محاسبه کنید

صحیح

subject: date:

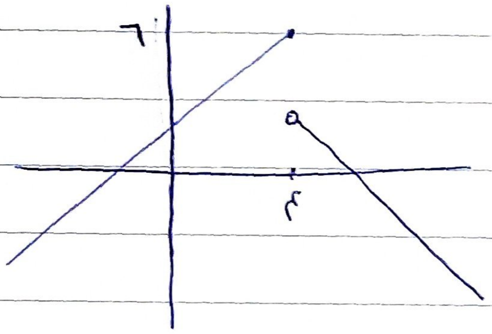
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۳x+۵}{\sqrt{۲x^۲-۵}} = \lim \frac{۳x+۵}{\sqrt{۲x^۲-۵}} \times \frac{۳x-۵}{۳x-۵} =$$

$$\frac{(۳x+۵)(۳x-۵)}{\cancel{(۳x-۵)}(\sqrt{۲x^۲-۵})} = \frac{۳x+۵}{\sqrt{۲x^۲-۵}} =$$

$$\frac{۳x}{\sqrt{۲}\,x} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

(

پیوستگی

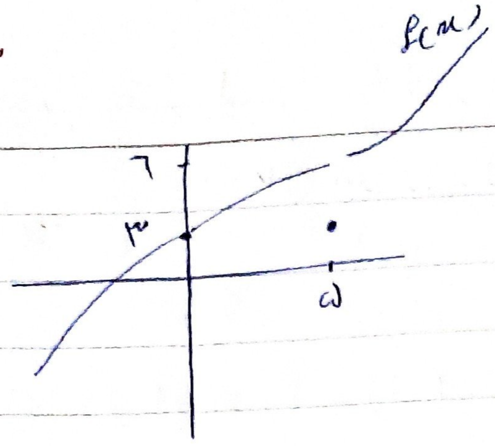


$$\lim_{x \to ۴^-} f(x) = ۶$$

حد راست ≠ حد چپ

$$\lim_{x \to ۴^+} f(x) = ۳$$

$f(۴) = ۶$



$\lim_{x\to ۵^-} f(x) = ۶$

۶ = ۶
حد دارد

$\lim_{x\to ۵^+} f(x) = ۶$

حد ≠ مقدار

(در نتیجه تابع پیوسته نیست) $f(۵)=۳$ مقدار

پیوستگی تابع :

تابع f در نقطه‌ی A پیوسته است هرگاه دارای شروط زیر باشد.

۱ـ تابع f در نقطه‌ی A مقدار داشته باشد. $A = f(a)$ وجود داشته باشد.

۲ـ تابع f در نقطه‌ی A حد داشته باشد. B $\lim(fx)$ وجود داشته باشد.

۳ـ حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

حد $A = B$ مقدار

تمرین : پیوستگی تابع را در نقطه‌ی صفر پیدا کنید.

$$\begin{cases} x^۲+۱ & x>۰ \\ ۲ & x=۰ \\ ۳x+۱ & x<۰ \end{cases}$$

$x=۰ \longrightarrow$ مقدار $f(۰)=۲$

$\lim_{x\to ۰^+} f(x) \; x^۲+۱ = ۰^۲+۱ = ۱$ حد راست

حد چپ = حد راست

$\lim_{x\to ۰^-} f(x) \; ۳x+۱ = ۳\times۰+۱ = ۱$ حد چپ

مقدار ≠ حد
۲ ۱

تابع پیوسته نیست.

پیوستگی در نقطه ۱ را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x+۲ & -۱<x\leq ۱ \\ ۳x & ۱<x<۵ \end{cases}$$

مرحله اول .

$x \leq ۱$

مساوی

پس مقدار $= x+۲$

$f(۱) = f(x+۲) = ۱+۲ = ۳$

مرحله دوم

$\lim\limits_{x\to ۱^+} (f(x))\ ۳x = ۳\times ۱ = ۳$

مرحله سوم

$\lim\limits_{x\to ۱^-} (f(x))\ x+۲ = ۳ \quad ۱+۲=۳$

$۳ = ۳$ تابع حد دارد

حد ۳ = ۳ مقدار پس پیوستگی دارد.

$$\begin{cases} x-۱ & ۰\leq x<۱ \\ ۱ & x=۱ \\ ۲x-۲ & x>۱ \end{cases}$$

مقدار $f(۱)=۱$

پیوستگی ندارد

حد $\neq$ مقدار

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)\quad ۲x-۲ = ۲(۱)-۲ = ۰ \\ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} (f(x))\quad x-۱ = ۱-۱ = ۰ \end{array}\right\}$ حد دارد

date:

subject:

مشتق: رفتار لحظه تابع را نشان می دهد.

مشتق اول تابع شیب یک تابع را نشان می دهد.

نقطه ی عطف تابع: جایی که تابع جهتش از مثبت به منفی تغییر کرده

[illegible] ←

$$f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x)$$

قوانین مشتق:

قانون: $f(a) \longrightarrow f'(a) = 0$

هر وقت عدد دیدیم مشتقش صفر می شود.

مثال $f(a) = 4 \longrightarrow f'(a) = 0$

قانون: $f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$

قانون: $f(x) = ax \longrightarrow f'(x) = a$

$f(x) = 5x \longrightarrow f'(x) = 5$

قانون: $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

مثال
$f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^4$
$3x^5 \longrightarrow f'(x) = 15x^4$

قانون: $f(x) + g(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) + g'(x)$

مثال: $2x + x^5 \xrightarrow[f']{} 2 + 5x^4$

subject:

date:

فرمول : $f(u \cdot v) \longrightarrow f'(u \cdot v) = u'v - v'u$

$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\}$ عبارت مشتق (عبارت)

$(\underset{u}{x+1})^2 \cdot (\underset{v}{3x-4})^5 = 2(x+1)(3x-4) - 5(3x-4)(x+1)^2$

$u' \; 2(x+1) \qquad v' \; \underset{n}{5}(3x-4)^4$

فرمول : $f(x) \; u^n \longrightarrow f'(u) = n u' u^{n-1}$

$\frac{x+1}{u} \to u' \; 1+0=1$

$(x+1)^2 \longrightarrow 2\underbrace{(1+0)}_{u'}\underbrace{(x+1)}_{u}^{2-1}$

جواب : $2(x+1)$

$(3x^4-2x^3)^5 \longrightarrow \underset{n}{5}\underbrace{(12x^3-6x^2)}_{u'}{}^{4}\underbrace{(3x^4-2x^3)}_{u}^{\overset{n-1}{④}}$

فرمول : $\frac{u}{v} \longrightarrow \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$\frac{(3x^2-2x+4)}{x^5-4x} = \frac{\overset{u'}{(6x-2+0)}\overset{v}{(x^5-4x)} - \overset{v'}{(5x^4-4)}\overset{u}{(3x^2-2x+4)}}{(x^5-4x)^2}$$

$(v^2) \to (x^5-4x)^2$

فرمول : $\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\sqrt{(x^2+3x)} = \frac{(2x+3)}{2\sqrt{(x^2+3x)}}$